Εργαστήριο Ναυτικής Μηχανολογίας Ι (8.3.61.8)

Μοντελοποίηση και Έλεγχος Αεροθερμαντήρα 2016

Δρ. Γ. Παπαλάμπρου
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
george.papalambrou@lme.ntua.gr

Εργαστήριο Ναυτικής Μηχανολογίας (Κτίριο Λ)
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
Εθνικό Μετσοβιο Πολυτεχνείο

March 9, 2016

Περιεχόμενα

Ο αεροθερμαντήρας

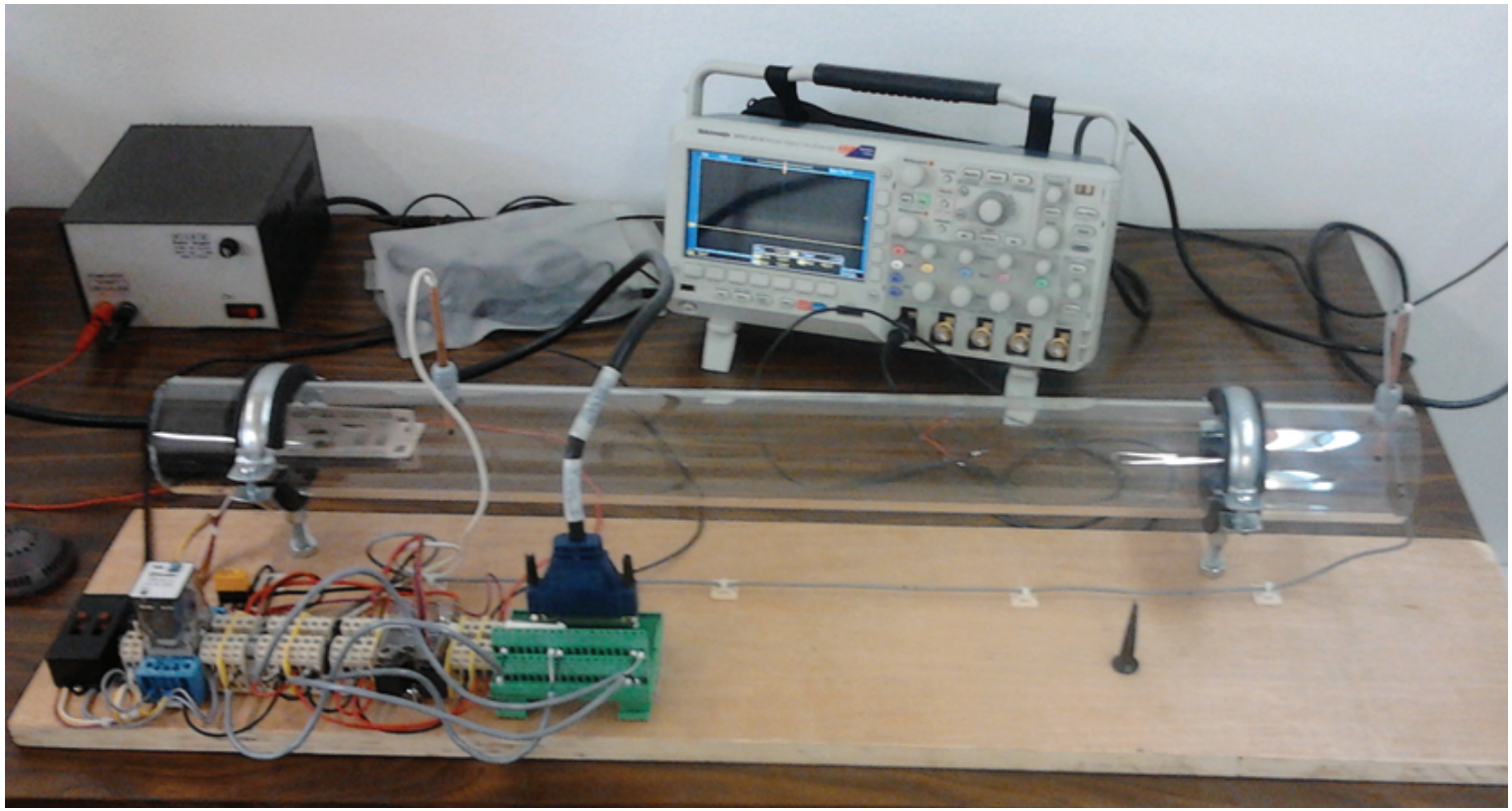


Figure: Ο αεροθερμαντήρας στο Εργαστήριο Ναυτικής Μηχανολογίας / ΣΝΜΜ

Στόχος της Εργαστηριακής Άσκησης

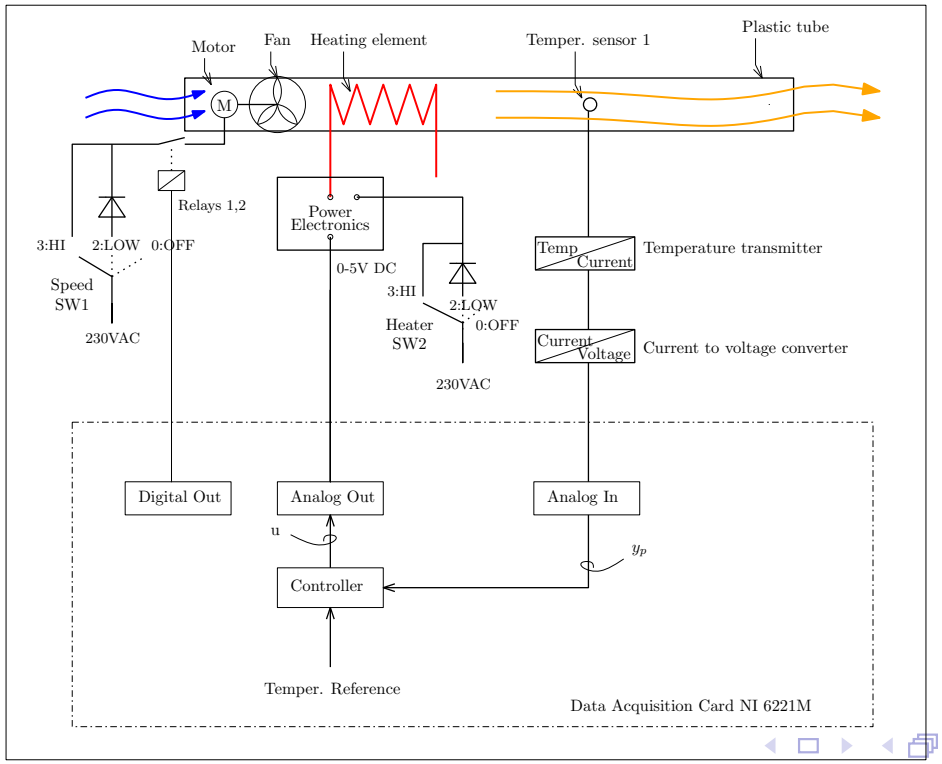
- Στόχος του συγκεκριμένου συστήματος ελέγχου είναι να διατηρεί την επιθυμητή θερμοκρασία αέρα.
- Θα σχεδιαστεί έτσι ελεγκτής σε κλειστό βρόχο με αρνητική ανατροφοδότηση, οποίος θα μπορεί να διατηρεί την επιθυμητή θερμοκρασία αέρα, παρουσία διαταραχών όπως είναι μικρές αλλαγές στην παροχή αέρα.
- Θα χρησιμοιηθούν έννοιες από το μάθημα "Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο".
- Στην αρχή θα γίνει ανάλυση του συστήματος ανοιχτού βρόχου, δηλ. χωρίς την παρουσία ελεγκτή.
- Θα ακολουθήσει ο υπολογισμός του ελεγκτή και η προσομοίωσή του στο MATLAB/Simulink, προκειμένου να αξιολογηθεί η απόδοση (performance) του συνολικού συστήματος.
- Όταν η απόδοση κριθεί ικανοποιητική, ο ελεγκτής θα δοκιμαστεί στην εργαστηριακή διάταξη.

Περιγραφή της εργαστηριακής διάταξης

- Ο αεροθερμαντήρας αποτελείται από ηλεκτρικό ανεμιστήρα σταθερών στροφών ο οποίος αναρροφά τον ατμοσφαιρικό αέρα, τον ωθεί κατά μήκος ενός πλαστικού σωλήνα και τον οδηγεί ξανά στην ατμόσφαιρα.
- Μετά τον ανεμιστήρα παρεμβάλλεται θερμαινόμενη αντίσταση νήματος ισχύος 2200 W.
- Ο επενεργητής (actuator), που αποτελείται από ηλεκτρονικό ισχύος 25 Amperes τύπου solid state relay και την αντίσταση, δέχεται αναλογική εντολή 0-5 V και ανάλογα θερμαίνει τον αέρα.
- Στον σωλήνα είναι τοποθετημένο ένα θερμοζεύγους (thermocouple) για την μέτρηση της θερμοκρασίας, ρυθμιζόμενο σε οποιαδήποτε απόσταση από την αντίσταση, εντός του σωλήνα, δίνοντας την δυνατότητα μελέτης παράγοντα καθυστέρησης (delay, $e^{-\theta s}$).

Περιγραφή της εργαστηριακής διάταξης

- Ένας Η/Υ (control computer) εξοπλισμένος με κάρτα επεξεργασίας δεδομένων (Data Acquisition-DAQ) στο περιβάλλον MATLAB/Simulink θα χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση του συστήματος ελέγχου.
- Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 6.



Διαφορικές εξισώσεις

- Στόχος είναι να διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την υπό μελέτη διεργασία.
- Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της θερμικής ενέργειας στον όγκο V του σωλήνα προκύπτει

$$q_a = q + q_i - q_o - q_t \tag{1}$$

όπου q είναι ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα από την αντίσταση, q_i είναι ο ρυθμός με τον οποίο η θερμότητα μεταφέρεται μέσα στον όγκο V του σωλήνα με τη βοήθεια του αέρα, q_o είναι ο ρυθμός με τον οποίο η θερμότητα μεταφέρεται έξω από τον όγκο V του σωλήνα με τη βοήθεια του αέρα και q_t είναι οι απώλειες θερμότητας από τον όγκο V προς το περιβάλλον λόγω ακτινοβολίας και αγωγής.

Διαφορικές εξισώσεις

- Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τα σχετικά μεγέθη.

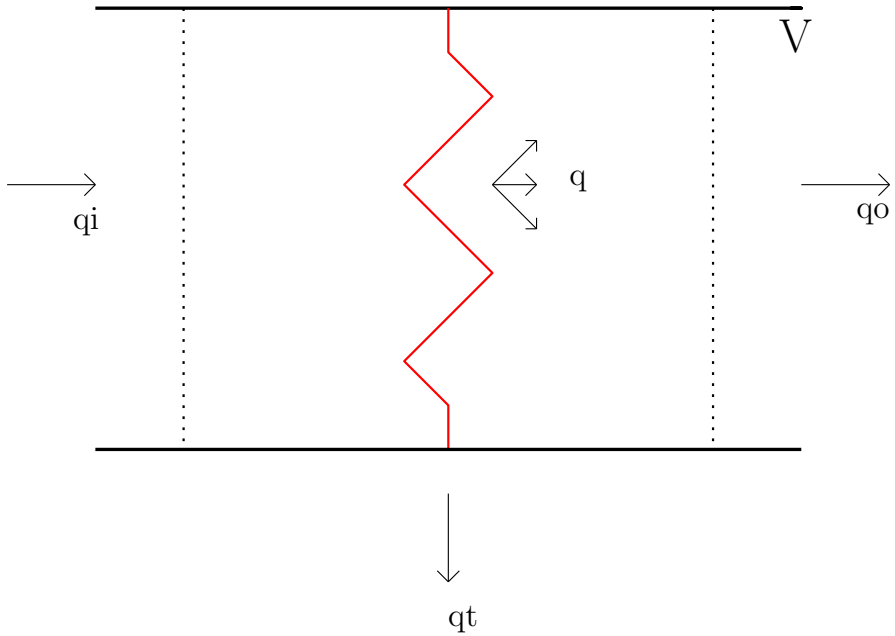


Figure: Η μεταφορά θερμότητας στον όγκο V.

Διαφορικές εξισώσεις

- Η συσσώρευση της θερμότητας μέσα στον όγκο του σωλήνα προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας T του αέρα.
- Υποθέτοντας ότι η κατανομή της θερμοκρασίας στον όγκο του σωλήνα είναι ομοιόμορφη, ο ρυθμός συσσώρευσης της θερμότητας δίνεται από τη σχέση

$$q_a = C\frac{dT}{dt} \tag{2}$$

όπου C είναι η θερμοχωρητικότητα του αέρα που καταλαμβάνει τον όγκο V του σωλήνα.

- Ο ρυθμός με τον οποίο η ροή του αέρα μεταφέρει θερμότητα μέσα και έξω από τον όγκο V του σωλήνα δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$q_i = cmT_a,\ q = cmT \tag{3}$$

όπου c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα του αέρα,
m είναι η μάζα του εισερχόμενου στον σωλήνα αέρα
και T_a είναι η θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Διαφορικές εξισώσεις

- Υποθέτοντας ότι η αύξηση της θερμοκρασίας $\Delta T = T - T_a$ είναι μικρή, ο ρυθμός q_t με τον οποίο η θερμότητα χάνεται προς το περιβάλλον είναι ανάλογη της θερμοκρασιακής αύξησης ΔT.
- Δηλαδή

$$q_i - q_o - q_t = -\frac{1}{R}\Delta T \tag{4}$$

όπου $-\frac{1}{R}$ είναι μία αναλογική σταθερά που ονομάζεται θερμική αντίσταση.

- Οι εξισώσεις (1), (2) και (4) δίνουν

$$C\frac{\Delta T}{dt} + \frac{1}{R}\Delta T = q \tag{5}$$

Συναρτήσεις μεταφοράς

- Για τον σχηματισμό της συνάρτησης μεταφοράς εισόδου-εξόδου, σε περίπτωση που γνωρίζουμε τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος, λαμβάνουμε μετασχηματισμό Laplace.
- Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση (5) προκύπτει

$$\frac{\Delta T(s)}{q(s)} = \frac{k_1}{\tau s + 1} \tag{6}$$

όπου $k_1 = \frac{1}{R}$ και $\tau = RC$, η σταθερά χρόνου.

Συναρτήσεις μεταφοράς

- Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός παροχής θερμότητας από την αντίσταση είναι ανάλογος της τάσης στα άκρα της αντίστασης V_i, η εξίσωση (6) δίνει τη συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην τάση στα άκρα της αντίστασης και στη θερμοκρασιακή αύξηση ΔT

$$\frac{\Delta T(s)}{V_i(s)} = \frac{k_1 k_2}{\tau s + 1} \tag{7}$$

όπου k_2 είναι αναλογική σταθερά ανάμεσα στην παροχή θερμότητας q και στην τάση V_i.

Περιγραφή της εργαστηριακής διάταξης

- Στην εξίσωση (7), ο όρος ΔT παριστά την θερμοκρασιακή αύξηση του αέρα που περιέχεται στον όγκο V του σωλήνα.
- Καθώς το αισθητήριο θερμοκρασίας είναι τοποθετημένο σε μία συγκεκριμένη απόσταση από την πηγή θερμότητας (αντίσταση), το σήμα εξόδου του αισθητηρίου θερμοκρασίας ανταποκρίνεται στη θερμοκρασιακή αλλαγή του αέρα με μία χρονική καθυστέρηση τ_d , η οποία ισούται με τον χρόνο που χρειάζεται ο θερμός αέρας να καλύψει την απόσταση μεταξύ της αντίστασης και του αισθητηρίου μέτρησης της θερμοκρασίας.
- Επομένως προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην τάση στα άκρα της αντίστασης V_i και στην θερμοκρασιακή αύξηση ΔT του αέρα ως

$$\frac{\Delta T(s)}{V_i(s)} = \frac{ke^{-\tau_d s}}{\tau s + 1} \tag{8}$$

όπου $k = k_1 k_2$.

Προσδιορισμός Μοντέλου

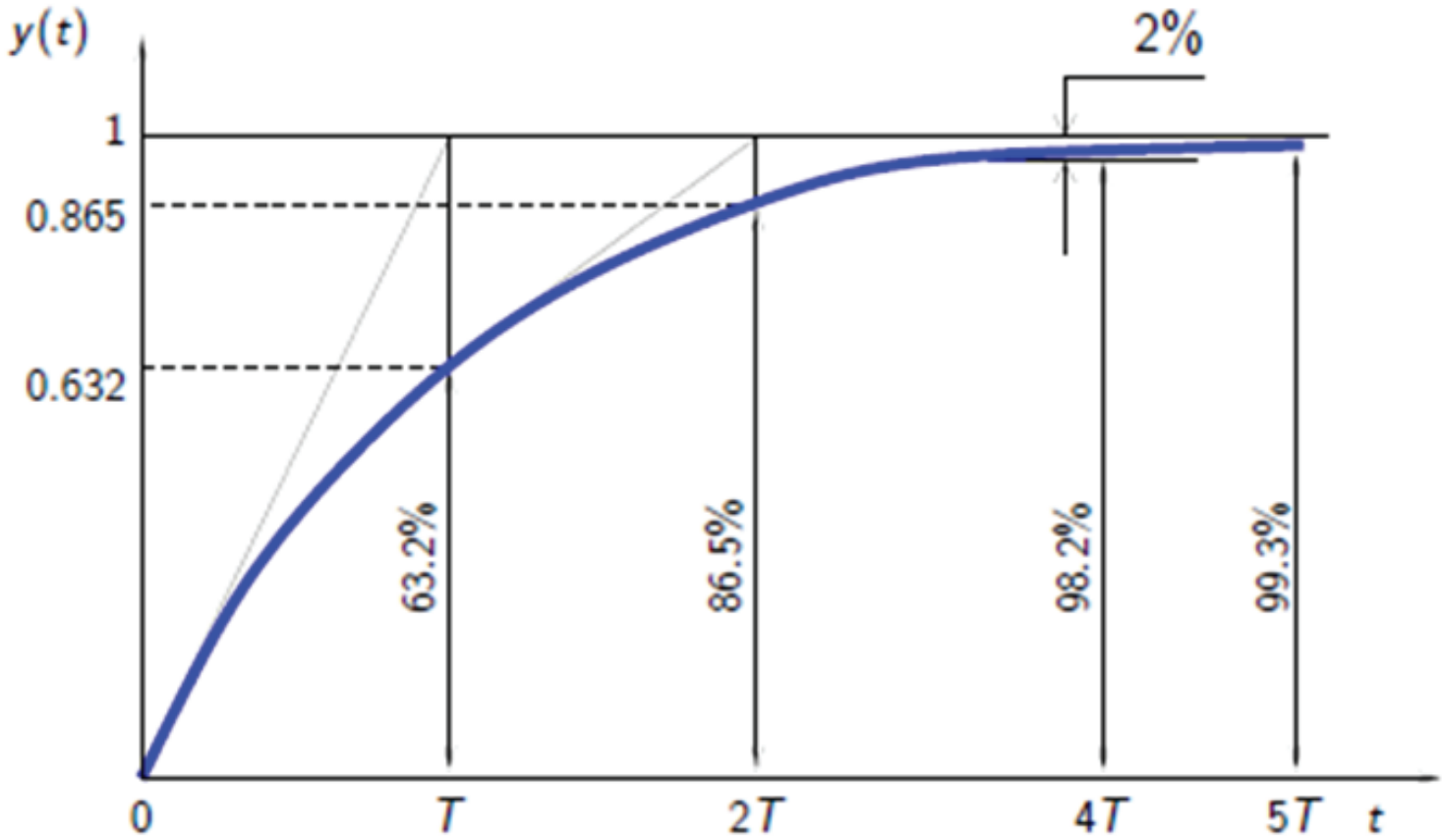
- Η διατύπωση μοντέλου μιας διεργασίας από την πειραματική καμπύλη απόκρισης είναι γνωστή ως μέθοδος καμπύλης απόκρισης (process reaction curve method).
- Η διεργασία του αεροθερμαντήρα μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από συνάρτηση μεταφοράς πρώτης τάξης με καθυστέρηση (First Order Plus Time Delay-FOPTD), με μορφή

$$G = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \tag{9}$$

όπου k είναι το κέρδος, θ η καθυστέρηση και τ η σταθερά χρόνου. Οι παράμετροι k, θ, τ προσδιορίζονται με γραφικό τρόπο.

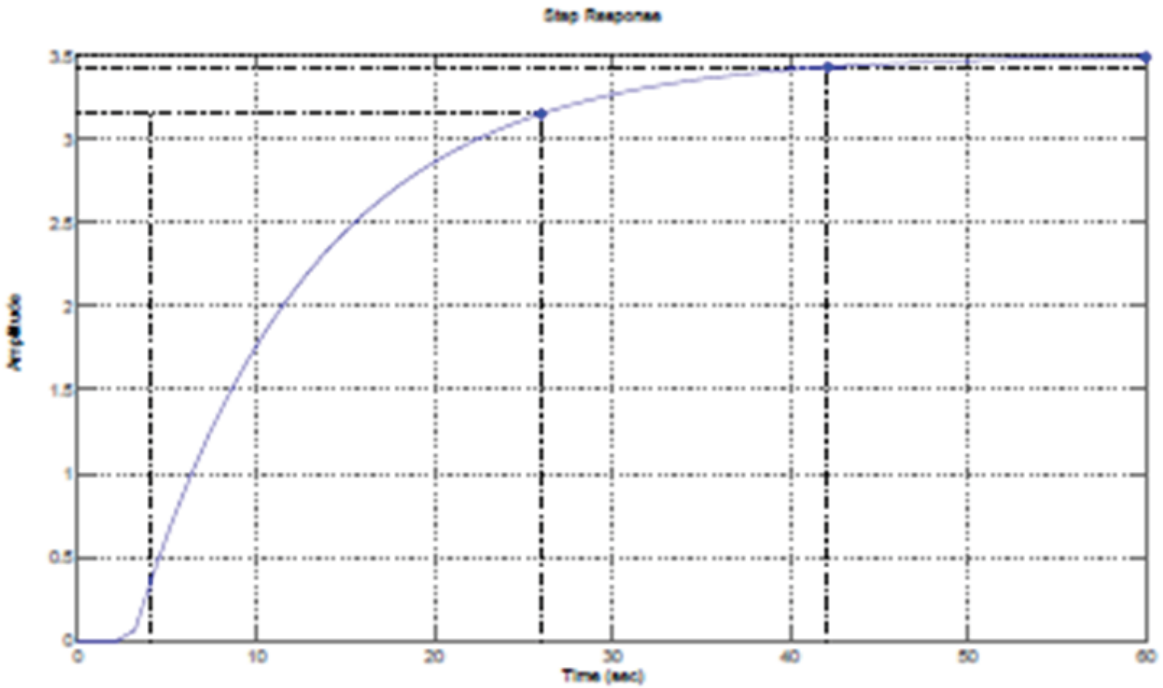
Προσδιορισμός Μοντέλου

- Η απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας (step input) φαίνεται στο Σχήμα.



Παράδειγμα

- Ακολουθεί παράδειγμα με τον γραφικό υπολογισμό των παραμέτρων ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς πρώτης τάξης με καθυστέρηση.
- Η πειραματική καμπύλη απόκρισης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας δίνεται στο Σχήμα.



Παράδειγμα

- Το κέρδος K στη μόνιμη κατάσταση υπολογίζεται ως

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta u} = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{u_{max} - u_{min}} = \frac{(3.5 - 0)}{(1 - 0)} = 3.5 \tag{10}$$

- Η καθυστέρηση ευρίσκεται από την καμπύλη ως $\theta = 3\ sec.$.
- Η σταθερά χρόνου αντιστοιχεί σε απόκριση ίση με το 63.2% της τελικής τιμής στη μόνιμη κατάσταση, δηλ.

$$y_{63.2} = 0.632 * \Delta Y = 0.632 * 3.5 = 2.212 \tag{11}$$

για $t = 13\ sec.$

- Έτσι

$$\tau = t - delay = 13 - 3 = 10\ sec \tag{12}$$

- Χρόνος για να φτάσει το σύστημα στη μόνιμη κατάσταση: περίπου 4τ.

Ο αεροθερμαντήρας

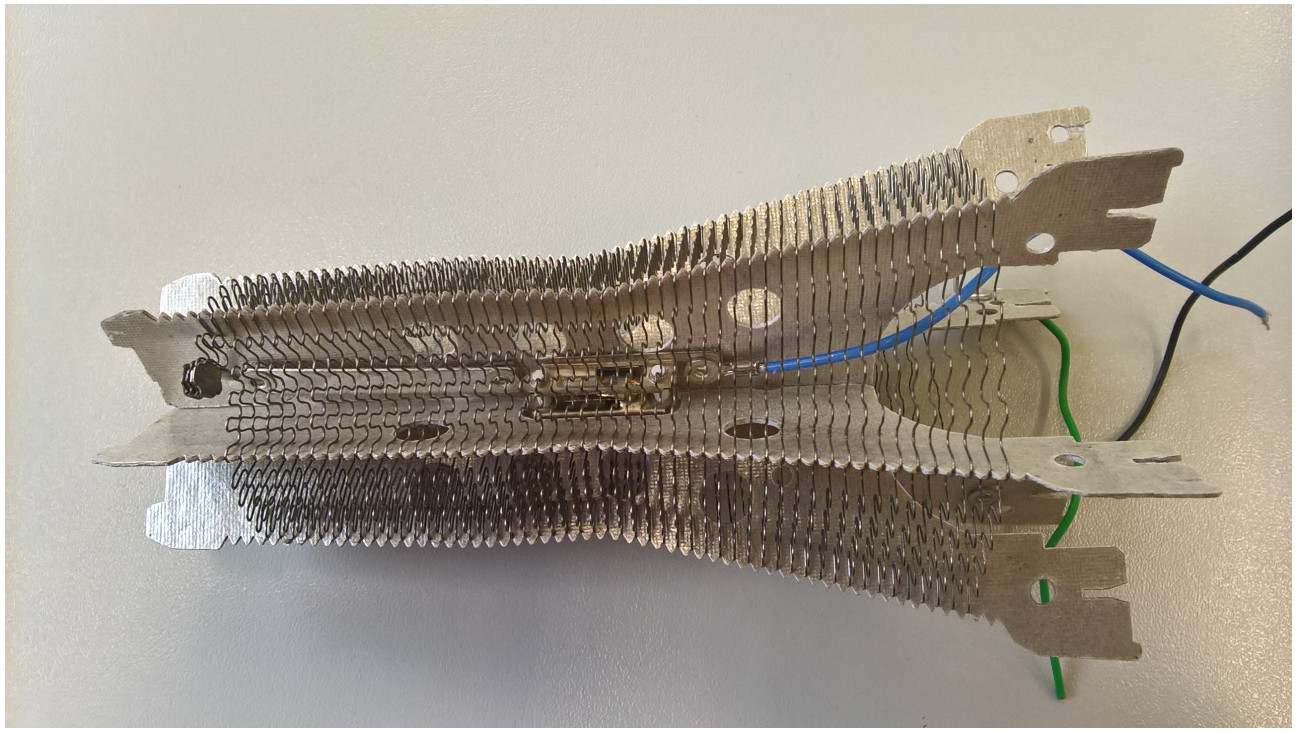


Figure: Η αντίσταση θέρμανσης αέρα

Power electronics: Solid state relay

crydom Control Relays Datasheet

MCBC Series

- Microprocessor based burst-fire controller / SSR
- Ratings from 25A to 90A @ 48-530 VAC
- Low-voltage, current, or potentiometer control
- Output status indicator
- Separate output enable / disable control
- Two time-base periods available
- For use with resistive loads only

PRODUCT SELECTION

Line Voltage	25 A	50 A	90 A
40-140 VAC	MCBC1225	MCBC1250	MCBC1290
180-280 VAC	MCBC2425	MCBC2450	MCBC2490
300-530 VAC	MCBC4825	MCBC4850	MCBC4890

AVAILABLE OPTIONS

Series: MC

Product Type — BC: Burst Fire Controller

Line Voltage — 12: 48-140 Vrms; 24: 180-280 Vrms; 48: 330-530 Vrms

Rated Current — 25: 25 Amps; 50: 50 Amps; 90: 90 Amps

Analog Control Signal — A: 0-5 VDC; B: 0-7 VDC; C: 0-10 VDC; D: 4-20 mA; E: Internal Potentiometer

Time Base Period — F: 10 AC Cycles; L: 20 AC Cycles

Figure: Power electronics: Solid state relay ratings

Power electronics: Solid state relay

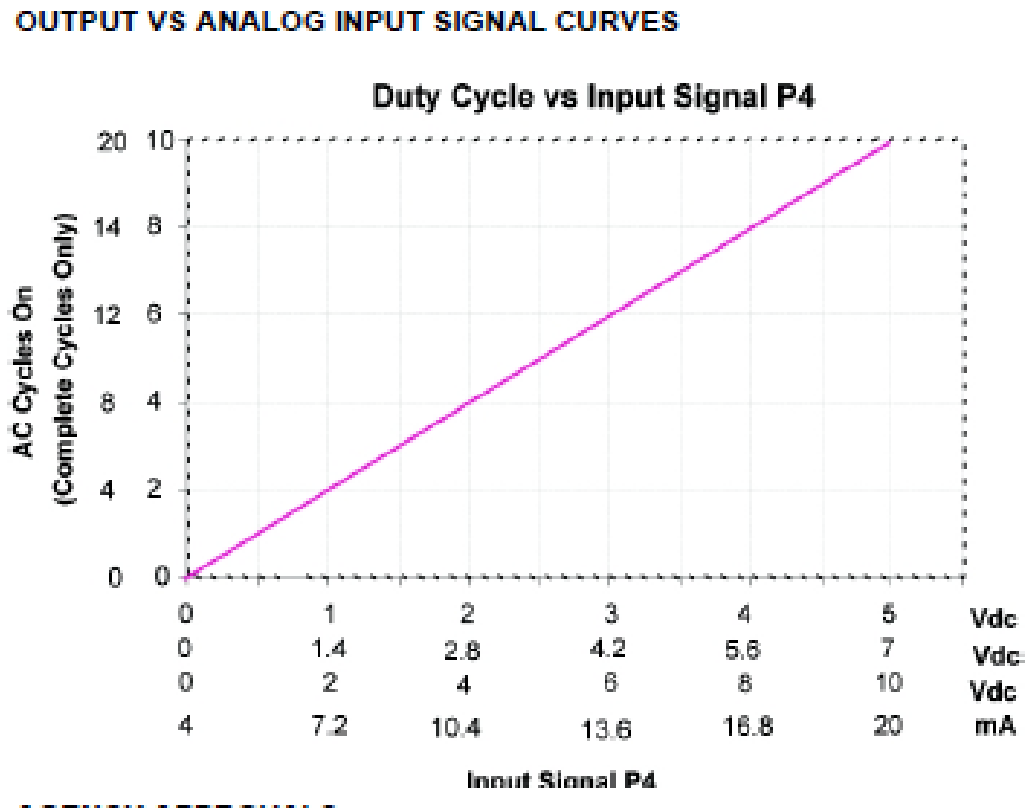
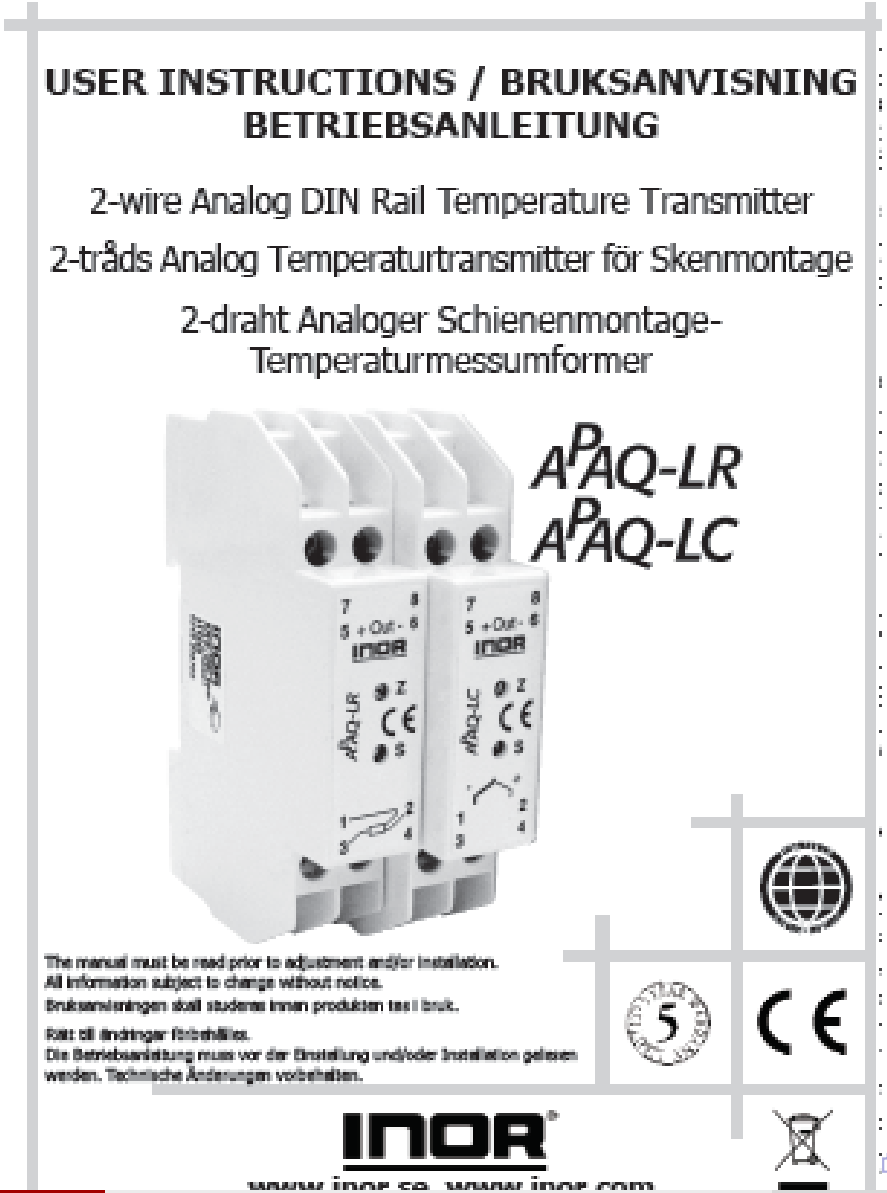


Figure: Power electronics: Solid state relay cycles

Μέτρηση θερμοκρασίας: Μεταδότης



Μέτρηση θερμοκρασίας: Μεταδότης

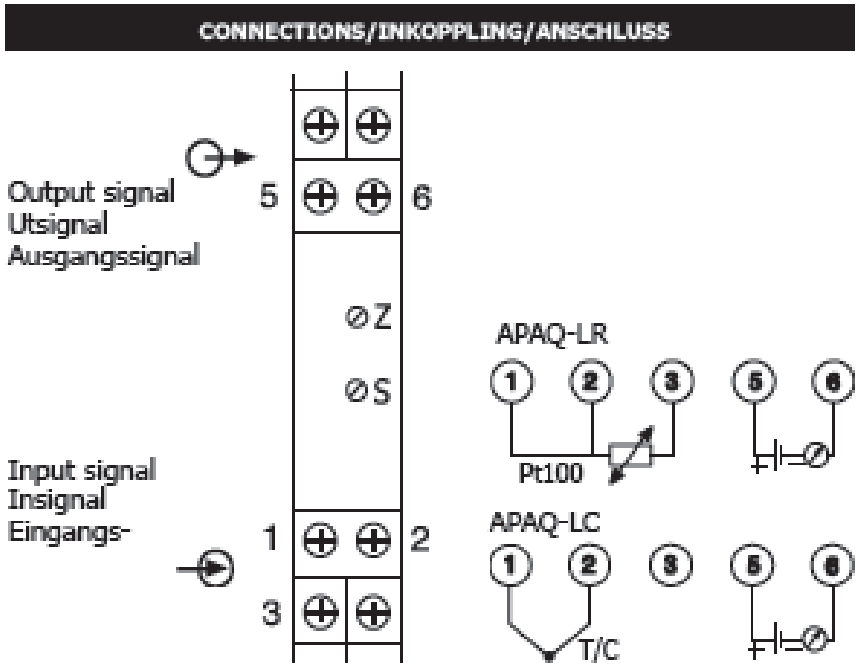


Figure: Συνδεσμολογία μεταδότη μέτρησης θερμοκρασίας

Μέτρηση θερμοκρασίας: Στοιχείο

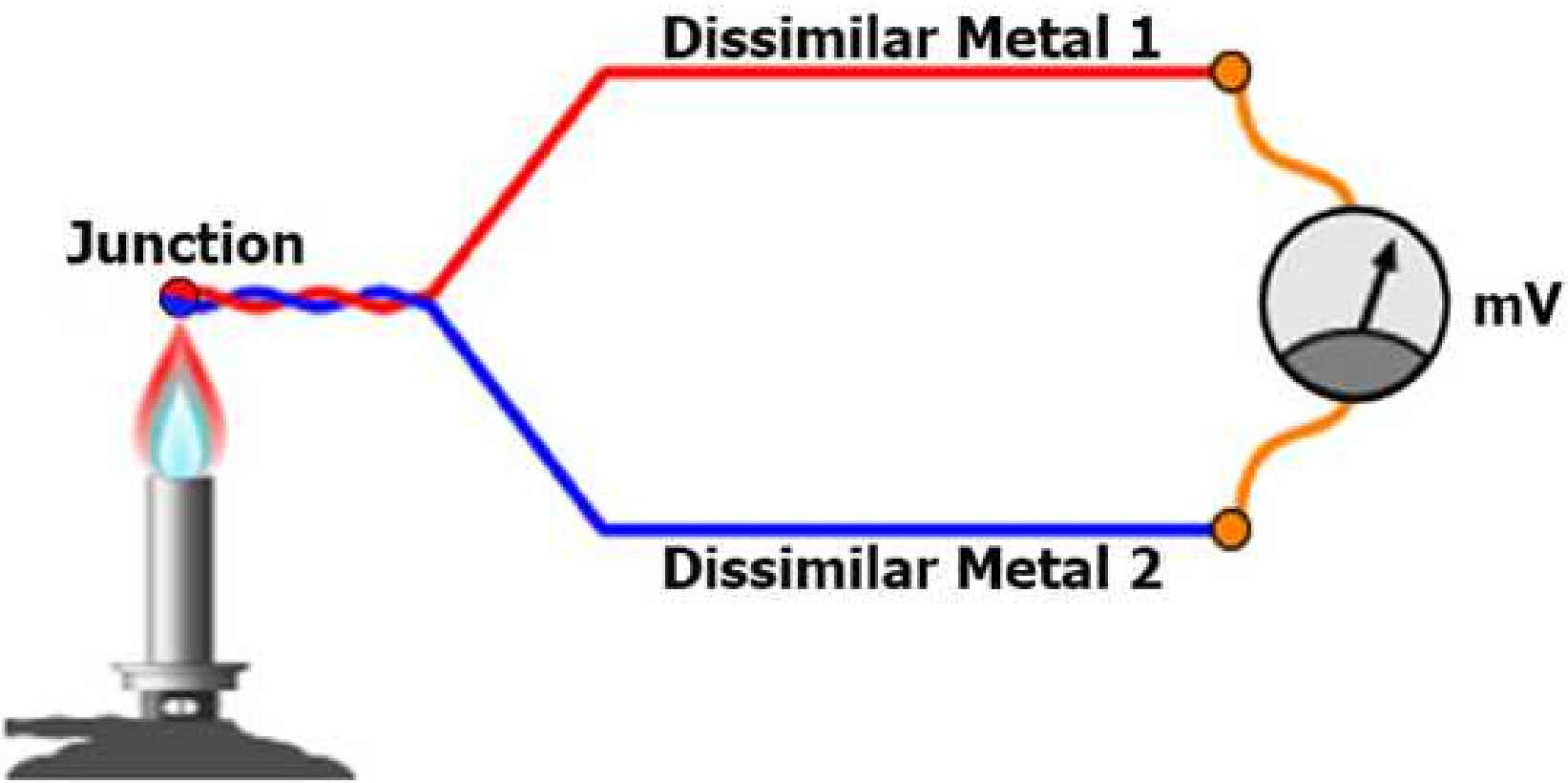


Figure: Στοιχείο μέτρησης θερμοκρασίας τύπου Thermocouple (TC)

Μέτρηση θερμοκρασίας: Στοιχείο

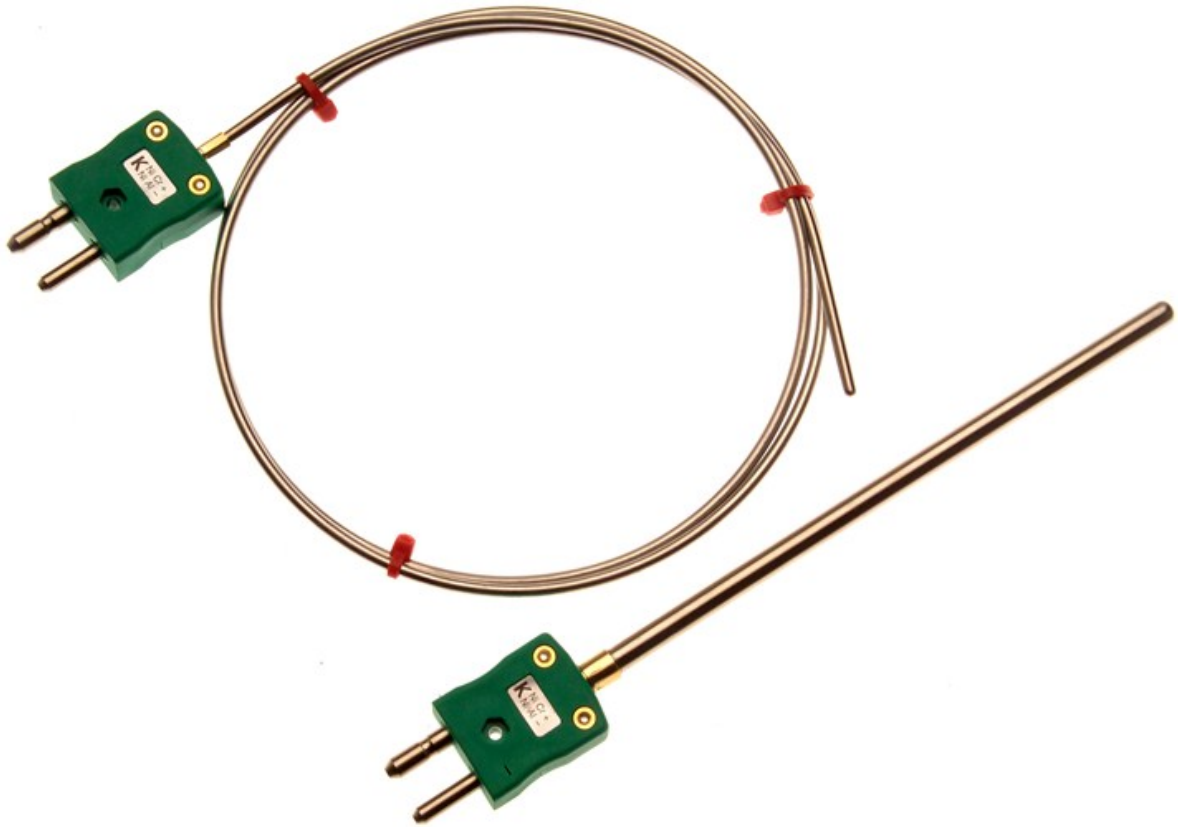


Figure: Στοιχείο μέτρησης θερμοκρασίας τύπου Thermocouple (TC) με το χαρακτηριστικό φις

Βήματα Υλοποίησης

- Στόχος του συγκεκριμένου συστήματος ελέγχου είναι να διατηρεί την επιθυμητή θερμοκρασία αέρα.
- Θα σχεδιαστεί έτσι ελεγκτής σε κλειστό βρόχο με αρνητική ανατροφοδότηση, οποίος θα μπορεί να διατηρεί την επιθυμητή θερμοκρασία αέρα, παρουσία διαταραχών όπως είναι μικρές αλλαγές στην παροχή αέρα.
- Θα χρησιμοιηθούν έννοιες από το μάθημα "Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο".
- Στην αρχή θα γίνει ανάλυση του συστήματος ανοιχτού βρόχου, δηλ. χωρίς την παρουσία ελεγκτή.
- Θα ακολουθήσει ο υπολογισμός του ελεγκτή και η προσομοίωσή του στο MATLAB/Simulink, προκειμένου να αξιολογηθεί η απόδοση (performance) του συνολικού συστήματος.
- Όταν η απόδοση κριθεί ικανοποιητική, ο ελεγκτής θα δοκιμαστεί στην εργαστηριακή διάταξη.

Ανάλυση συστήματος ανοιχτού βρόχου-Προδιαγραφές

- Γίνεται η εύρεση πόλων της συνάρτησης μεταφοράς προκειμένου να αξιολογηθεί η συμπεριφορά του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Στο MATLAB σχετικές εντολές είναι οι: `pole, pzmap`.
- Ισχύουν οι προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης συστημάτων 1ης τάξης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας.

Ελεγκτής PID

- Στα πλαίσια της εργαστηριακής άσκησης, απαιτείται η κατασκευή ελεγκτή τύπου PI στο Simulink.
- Ως παράμετροι ελεγκτή PI θα μπούν οι τιμές που θα προκύψουν από τον υπολογισμό ενός ελεγκτή PI ρυθμισμένο κατά IMC (Internal Model Control).
- Η απόκριση θα ελεγχθεί κατα την εργαστηριακή δοκιμή.
- Τυπικός ελεγκτής PID φαίνεται στο Σχήμα 10.

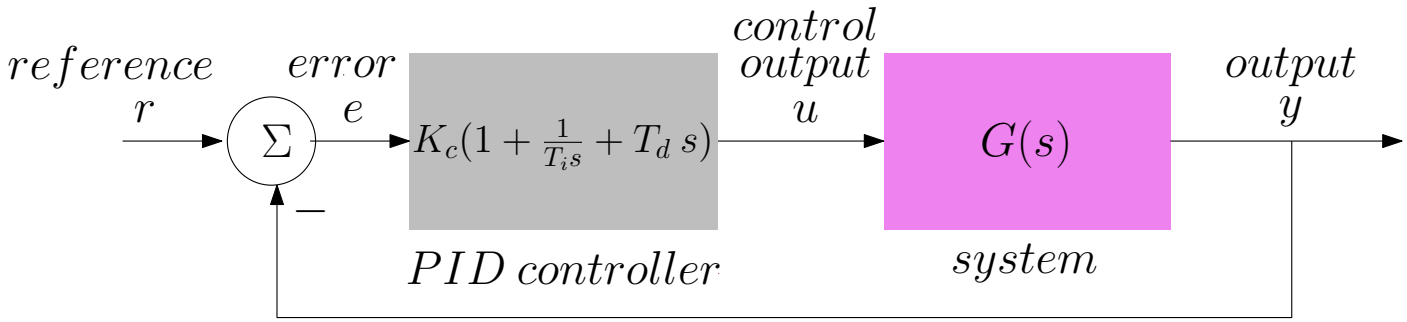


Figure: Ελεγκτής PID.

Ρύθμιση Παραμέτρων Ελεγκτών: Μέθοδος PID_IMC

- Με τη μέθοδο ρύθμισης PI, PID κατά IMC προκύπτουν παράμετροι για ελεγκτές PI, PID για διάφορες συναρτήσεις μεταφοράς συστημάτων.
- Ο πίνακας στο Σχήμα 11 δείχνει τις διάφορες τιμές παραμέτρων ελεγκτών PI, PID με βάση τον ελεγκτή τύπου IMC. Το σύστημα περιγράφεται με το μοντέλο (Model), για περιπτώσεις (Cases) A-H. Έχει εκλεγεί φίλτρο τάξης $n = 1$.
- Η σταθερά χρόνου του φίλτρου τ_c είναι παράμετρος σχεδιασμού.
- Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή *PID* είναι

$$G_c(s) = K_C \left(1 + \frac{1}{\tau_i\, s} + \tau_D\, s\right) \tag{13}$$

Ρύθμιση Παραμέτρων Ελεγκτών: Μέθοδος PID_IMC

Case	Model	K_cK	τ_I	τ_D
A	$\frac{K}{\tau s+1}$	$\frac{\tau}{\tau_c}$	τ	—
B	$\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$	$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_c}$	$\tau_1+\tau_2$	$\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$
C	$\frac{K}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$	$\frac{2\zeta\tau}{\tau_c}$	$2\zeta\tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$
D	$\frac{K(-\beta s+1)}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$, $\beta>0$	$\frac{2\zeta\tau}{\tau_c+\beta}$	$2\zeta\tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$
E	$\frac{K}{s}$	$\frac{2}{\tau_c}$	$2\tau_c$	—
F	$\frac{K}{s(\tau s+1)}$	$\frac{2\tau_c+\tau}{\tau_c^2}$	$2\tau_c+\tau$	$\frac{2\tau_c\tau}{2\tau_c+\tau}$
G	$\frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s+1}$	$\frac{\tau}{\tau_c+\theta}$	τ	—
H	$\frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s+1}$	$\frac{\tau+\frac{\theta}{2}}{\tau_c+\frac{\theta}{2}}$	$\tau+\frac{\theta}{2}$	$\frac{\tau\theta}{2\tau+\theta}$

Figure: Τιμές παραμέτρων ελεγκτών PI, PID με βάση ελεγκτή IMC

Εκτέλεση Δοκιμής

- Θα μετρηθούν με τη βοήθεια της κάρτας συλλογής δεδομένων, θερμοκρασίες σε διαφορετικά φορτία κατά τη θέρμανση και ψύξη του αέρα.
- Το Σχ. 31 παριστά τη μετρημένη θερμοκρασία αέρα και το Σχ. 32 παριστά τη μετρημένη εντολή στην αντίσταση θέρμανσης, με μορφή τεραγωνικού παλμού με εύρος 0 ως 2 V.
- Ο οριζοντιος άξονας δείχνει τον αριθμό δειγμάτων. Εδώ είναι 1000 samples / 1 sec.

Θερμοκρασία αέρα

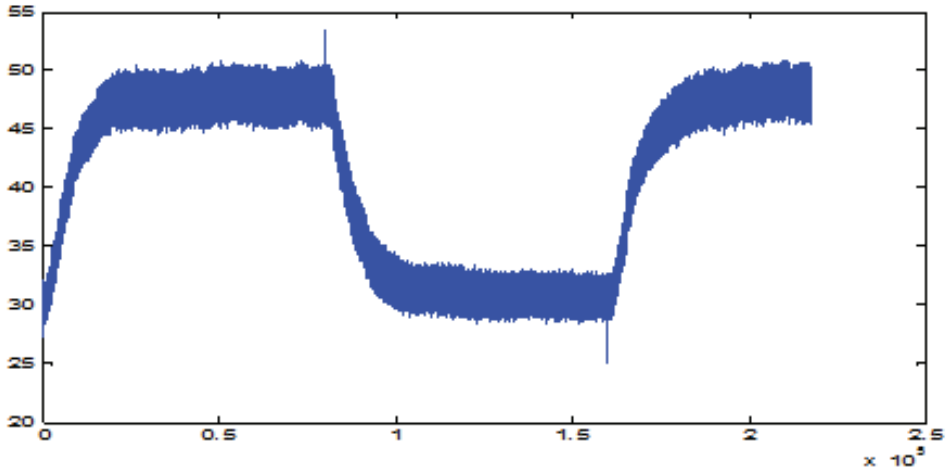


Figure: Θερμοκρασία αέρα (deg C)

Εντολή στην αντίσταση θέρμανσης

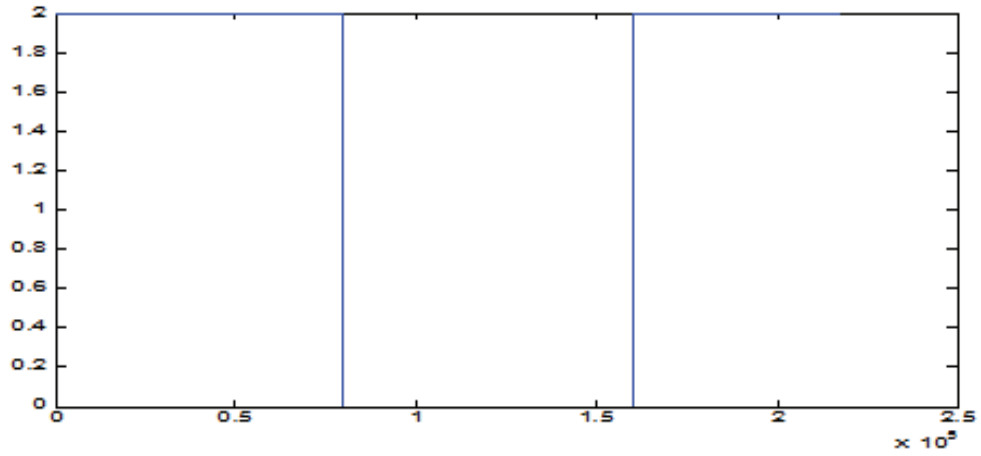


Figure: Εντολή στην αντίσταση θέρμανσης (Volt)

Εκτέλεση Δοκιμής

- Σε όλες τις δοκιμές θα τεθεί ταχύτητα ανεμιστήρα στη σκάλα 2 και αντίσταση στη σκάλα 2.
- Θα γίνει δοκιμή ανοιχτού βρόχου για την εύρεση παραμέτρων του μοντέλου με εντολή τετραγωνικού παλμού 0-1.5 Volt, που θα δώσει θερμοκρασία περίπου ίση με 30-45 deg. C.
- Κατόπιν θα σχεδιαστεί ο ελεγκτής PI, με ρύθμιση παραμέτρων κατά IMC. Τέλος το σύστημα κλειστού βρόχου θα δοκιμαστεί σε περιοχές α) 30-45 deg. C. και β) 30-50 deg. C.

Βήματα Εργαστηριακής Άσκησης

- Μελετήστε το φυλλάδιο του Αεροθερμαντήρα στην ιστοσελίδα ΕΝΜ Ι.
- Χρειάζεται να εκτελέστε τις ενέργειες υπολογισμού του ελεγκτή και τη δοκιμή για να συλλέξετε τα πειραματικά αποτελέσματα.
- Μεταφέρετε τα αποτελέσματα και τις παρατηρήσεις στη γραπτή έκθεση που θα παραδώσετε.

Αρχεία Δοκιμής

- Σκοπός είναι να δημιουργηθεί εφαρμογή στο MATLAB/Simulink, με τα δομικά διαγράμματα του συστηματος ελέγχου.
- Τα απαραίτητα αρχεία της άσκησης υπάρχουν στον υποκατάλογο Desktop/ENMI_2016.
- Εδώ θα μετατρέψετε το αρχικό αρχείο σύμφωνα με το δικό σας περιεχόμενο και ρυθμίσεις.
- Πρέπει να υπάρχει δυνατότητα αποθήκευσης των διαφόρων παραμέτρων για την εκτέλεση των διαγραμμάτων αποκρίσεων για τις διάφορες περιπτώσεις.
- Στο τέλος κάθε δοκιμής πρέπει να σώσετε τα αποτελέσματα σε αρχείο αποτελεσμάτων. Με τη σχετική εντολή `save filename variables`, οι μεταβλητές `variables` αποθηκεύονται στο αρχείο `filename.mat`.

Απαιτήσεις Εργαστηριακής Έκθεσης

1. Η εργαστηριακή έκθεση γράφεται στο σπίτι, με αποτελέσματα που λήφθηκαν κατά την εκτέλεση της εργαστηριακής δοκιμής.
2. Η εργαστηριακή έκθεση είναι ατομική και περιγράφει την εργασία του κάθε σπουδαστή. Κατά την εκτέλεση της δοκιμής οι σπουδαστές συμμετέχουν ανά δύο άτομα (ομάδες των 2 ατόμων).
3. Η εργαστηριακή έκθεση δεν θα υπερβαίνει τις 4 σελίδες (μονής όψης). Θα παραδίδεται στον διδάσκοντα (ΓΠ), τυπωμένη σε χαρτί (όχι φωτοτυπία).
4. Τροπος βαθμολόγησης εργαστηριακή έκθεσης: Η έκθεση αξιολογείται από τον διδάσκοντα (ΓΠ), και βαθμολογείται ως εξής:
   - Δεν υποβλήθηκε εργαστηριακή έκθεση
   - Αποδεκτή
   - Μη Αποδεκτή
   - Αποδεκτή με πλεονέκτημα

Απαιτήσεις για την συγκεριμένη άσκηση

- Για τον ελεγκτή PI απαιτούνται το διάγραμμα των πόλων ανοιχτού και κλειστού βρόχου, μοντελο του συστήματος ανοιχτού βρόχου, ο υπολογισμός του ελεγκτή PI, και οι απόκρισεις κατά τη δοκιμή σε πραγματικό χρόνο για α) 30-45 deg. C. και β) 30-50 deg. C.
- Επίσης πρέπει να υπάρχει το διάγραμμα Simulink της δοκιμής σε πραγματικό χρόνο.

Υποδείξεις και Βοήθεια

Προτείνονται τα εξής (όπου εφαρμόζονται):

1. Προτιμάται να υπάρχουν Πίνακας περιεχομένων, Εισαγωγή, Συμπεράσματα
2. Γράφετε με σαφήνεια και δίνετε απαντήσεις/σχόλια μόνον σε ότι ζητείται.
3. Μην αναφέρεστε στο θεωρητικό κομμάτι, εφόσον τις περισσότερες φορές έχει ήδη παρουσιασθεί.
4. Δώστε έμφαση στη δική σας συνεισφορά και εμπειρία που αποκομίσατε.
5. Εξηγείστε τις διάφορες επιλογές παραμέτρων/ρυθμίσεων που κάνατε.
6. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Εξηγήστε τυχόν αποκλίσεις από την επιθυμητή συμπεριφορά. Συγκρίνετε τα διαφορετικά σενάρια δοκιμών.

Βήματα Υλοποίησης

- Γραφικές παραστάσεις αποτελεσμάτων:
  - Προτιμάται να υπάρχουν διαφορετικές γραμμές (συνεχείς, διακεκομένες, κα) παρά χρωματιστές
  - Χρησιμοποιείστε την εντολή plot αντί του screenshot των Simulink scopes
  - Χρησιμοποιείστε labels στους άξονες, με τα μεγέθη και τις μονάδες. Σχετικές είναι οι εντολές: `plot`, `xlabel`, `ylabel`, `title`, `legend`, `grid`
  - Για διπλό διαγράμμα θα χρησιμοποιηθούν κατάλληλα οι εντολές `subplot(211)`, `plot()`,..., `subplot(212)`, `plot()`,...
- Παρουσιάσεις αποτελεσμάτων: δώστε έμφαση στην περιγραφή των μεταβλητών ελέγχου, ελεγχόμενων μεταβλητών. Μην εξηγείτε το μαθηματικό μοντέλο